

Geometrische Muster aus Dreiecken, Vierecken und Sechsecken

Teilnehmer	Donald Kobbelt, 11 Jahre
Schule	Kaiser-Karls-Gymnasium Augustinerbach 2-7 52062 Aachen
Projektbetreuer/in	Leif Kobbelt
Thema des Projekts	Ich möchte komplizierte geometrische Muster systematisch konstruieren. Wie viele verschiedene Muster gibt es?
Fachgebiet	Mathematik
Wettbewerbssparte	Schüler experimentieren
Bundesland	Nordrhein-Westfalen
Wettbewerbsjahr	2020 / 2021

Geometrische Muster aus Dreiecken, Vierecken und Sechsecken

Kurzfassung

Ich habe untersucht, wie viele verschiedene geometrische Muster man finden kann, wenn man Dreiecke, Vierecke und Sechsecke miteinander mischt. Ich wollte dabei systematisch vorgehen und nicht nur einfach herumprobieren, damit ich am Ende sicher sein kann, dass ich keine Kombination vergessen habe. Zuerst habe ich alle Gruppen von Polygonen gesucht, die sich ohne Lücken um eine gemeinsame Ecke herum legen lassen. Dann habe ich diese Gruppen kombiniert und damit dann einfache, gemischte, doppelt gemischte und am Ende sogar dreifach gemischte Muster konstruiert. Die Muster sind dabei immer komplizierter geworden. Ich habe Tabellen verwendet, um damit wirklich alle möglichen Kombinationen aufzuzählen und keine aus Versehen zu übersehen. So habe ich viele tolle Muster gefunden und sogar welche, die auf der Wikipedia-Seite über „Parkettierungen“ gar nicht aufgelistet waren. Ich habe herausgefunden, dass man verschiedene Arten von Mustern unterscheiden kann und dass es verschiedene Definitionen für diese Arten-Einteilung gibt.

Leider wurde 2020 der Landeswettbewerb in Essen wegen Corona abgesagt und die Schule war lange geschlossen. Daher habe ich zu Hause an meinem Projekt weitergearbeitet. Ich habe die Definitionen für die Muster besser erklärt und eine neue Einteilung der Muster nach unterschiedlichen Arten gemacht. **Vor allem habe ich es jetzt aber geschafft auch alle dreifach gemischten Muster systematisch zu konstruieren**, was ich im letzten Jahr noch nicht hinbekommen habe, weil ich immer gedacht habe es gibt zu viele Kombinationen. Dann ist mir aber eingefallen, wie ich sehr viele Kombinationen davon ausschließen kann.

Inhaltsverzeichnis

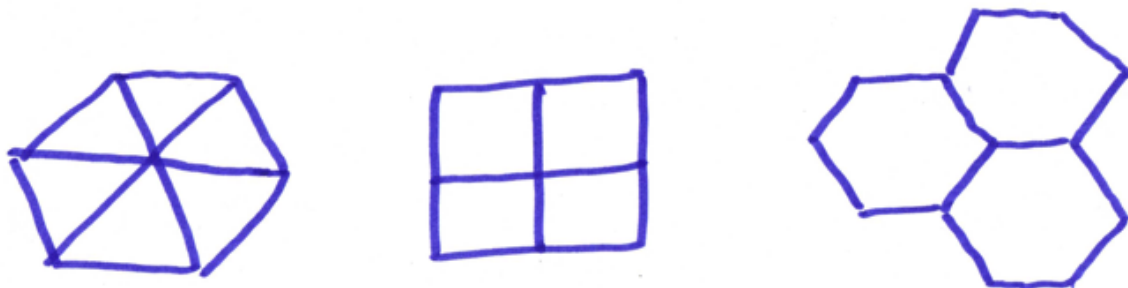
(1) Einleitung	1
(2) Forschungsfrage	1
(3) Definitionen	2
(4) Durchführung des Projektes / Vorgehensweise	5
(4.1) Einfache Muster	5
(4.2) Gemischte Muster	6
(4.3) Doppelt gemischte Muster	8
(4.4) Dreifach gemischte Muster	10
(5) Fazit	13
(6) Quellen	15

(1) Einleitung:

Geometrische Muster gibt es überall. Zum Beispiel bei den Mosaiken im Aachener Dom, auf Tapeten, Vorhängen, Geschenkpapier, in der Straßenpflasterung oder als Bildschirmhintergrund am Computer. Manche von diesen Mustern sind schon tausende von Jahren alt, denn schon die alten Ägypter haben ihre Vasen und Grabkammern mit Mustern dekoriert.

Aber wie viele verschiedene Muster gibt es eigentlich? Gibt es unendlich viele und kann man immer neue Muster erfinden?

Ich wusste schon, dass man geometrische Formen nicht beliebig zu Mustern zusammensetzen kann. Sie müssen nämlich ohne Lücken und Überlappung zusammenpassen. Beim Tag der offenen Tür im Kaiser-Karls-Gymnasium im letzten Jahr hatte ich gelernt, dass man rein regelmäßige Muster nur aus Dreiecken, Vierecken und Sechsecken zusammensetzen kann, das heißt es gibt nur 3 einfache (reguläre) Muster:



Wie viele Muster kommen dazu, wenn man Dreiecke, Vierecke und Sechsecke **mischen** darf?

Bei Wikipedia heißen diese Polygon-Muster „Parkettierungen“. Dort werden **Platonische**, **Archimedische** und **Demi-Reguläre** Parkettierungen erklärt. Ich nenne diese Muster später „einfach“, „gemischt“ und „doppelt gemischt“. Bei Wikipedia steht auch, dass es überhaupt nur **3** Platonische, **8** Archimedische und **20** Demi-Reguläre Parkettierungen gibt. Wenn man nur Dreiecke, Vierecke und Sechsecke verwendet, also keine Achtecke und Zwölfecke, dann gibt es sogar nur **3** Platonische, **5** Archimedische und **17** Demi-Reguläre Muster.

Wie kann man sicher sein, dass das tatsächlich **alle** möglichen Muster sind?

(2) Forschungsfrage:

Wie viele verschiedene Muster kann man legen, wenn man Dreiecke, Vierecke und Sechsecke mischt? Und wie kann man sicher sein, dass man kein Muster vergessen hat?

Um die Aufgabe nicht zu kompliziert zu machen, nehme ich keine Achtecke, Zwölfecke oder andere Formen dazu, sondern nur die drei Sorten von Polygonen, mit denen man einfache Muster legen kann, also nur Dreiecke, Vierecke und Sechsecke. Bevor ich neue Muster systematisch suchen kann, muss ich erstmal erklären was „Muster“ überhaupt bedeutet.

(3) Definitionen:

Meine Muster sollen aus **Polygonen (Definition 1)** bestehen. Wenn man (gleiche oder verschiedene) Polygone um eine Ecke herum legt, ohne dass eine Lücke bleibt, dann nennen wir diese Polygone zusammen eine **Gruppe (Definition 2)**. Ein **Muster (Definition 4)** entsteht, wenn sich eine Gruppe immer weiter fortsetzen lässt, das heißt, wenn sich (die gleiche oder mehrere verschiedene) Gruppen **aneinanderlegen (Definition 3)** lassen, so dass am Ende der gesamte Tisch ohne Lücken abgedeckt wird. Die Muster werden dabei immer komplizierter je mehr verschiedene Gruppen dafür verwendet werden.

Definition 1: *Polygone*

Polygone sind regelmäßige geometrische Formen mit geraden Kanten, die überall den gleichen Winkel und die gleiche Kantenlänge haben. Die Ecken dieser Polygone liegen auf einem Kreis. Es gibt 3-Ecke, 4-Ecke, 5-Ecke, 6-Ecke und noch mehr Ecke, aber ein 2-Eck und ein 1-Eck gibt es nicht. Der Innenwinkel, also der Winkel zwischen zwei Polygonkanten wird immer größer, je mehr Ecken ein Polygon hat. Beim Dreieck ist der Innenwinkel 60 Grad, beim Viereck 90 Grad, beim Fünfeck 108 Grad und beim Sechseck ist er 120 Grad. Egal wie viele Ecken ein Polygon hat, der Innenwinkel kann niemals 180 Grad erreichen.



Definition 2: *Gruppen*

Für eine **Gruppe** legen wir mehrere Polygone um eine Ecke herum, so dass keine Lücke übrigbleibt. Dazu müssen sich die Innenwinkel der Polygone zu exakt **360 Grad** aufsummieren. Weil alle Kanten gleich lang sind, liegen die Polygone dann automatisch Kante-an-Kante. Wenn wir eine Gruppe gefunden haben, kann man die Reihenfolge der Polygone vertauschen und findet entweder eine neue oder wieder die gleiche Gruppe.

Ich merke mir eine Gruppe mit einem Code, für den ich die Reihenfolge der Polygone durch Zahlen aufschreibe. Zum Beispiel bedeutet **3-4-6-4**, dass ich ein Dreieck, ein Viereck, ein Sechseck und dann noch ein Viereck zu einer Gruppe zusammenlege. Die Innenwinkel sind bei dieser Gruppe 60 Grad + 90 Grad + 120 Grad + 90 Grad = 360 Grad.

Je nachdem mit welchem Polygon ich dabei anfangen, gibt es verschiedene Codes für die gleiche Gruppe (z.B. **3-4-6-4**, **4-6-4-3**, **6-4-3-4**, **4-3-4-6**). Außerdem kann man die Polygone einer Gruppe im Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn aufzählen. Das ergibt dann nochmals verschiedene Codes für die gleiche Gruppe (z.B. **3-4-4-6**, **6-4-4-3**). Aber es können beim Vertauschen der Polygone auch neue Gruppen entstehen (z.B. **3-4-4-6** und **3-4-6-4** sind verschiedene Gruppen).

Eine **einfache Gruppe** besteht nur aus gleichen Polygonen (zum Beispiel **3-3-3-3-3-3** oder **4-4-4-4**). Eine **gemischte Gruppe** kombiniert verschiedene Polygone (z.B. **3-4-6-4**).

Definition 3: Zusammenlegen

Jede Gruppe hat eine Ecke in der Mitte. Beim **Zusammenlegen** von zwei Gruppen müssen wir aufpassen, dass dadurch nicht unbeabsichtigt eine neue zusätzliche Ecke oder Gruppe entsteht, sondern nur für jede der beiden Gruppen eine Ecke.



Dieses Bild zeigt wie man die Gruppen **4-3-4-3-3** und **3-4-6-4** richtig zusammenlegt (*links*). Wenn wir sie nebeneinanderlegen (*Mitte*), entsteht dazwischen eine neue Ecke mit der neuen Gruppe **4-4-3-3-3**. Wir müssen sie also besser so hinlegen, dass sich die beiden Gruppen ein gemeinsames Dreieck und ein Viereck teilen. Dann bleibt es bei den beiden ursprünglichen Ecken (*rechts*). Daran erkennt man, dass man nicht jedes Paar von Gruppen kombinieren kann, sondern nur solche Gruppen, bei denen zwei aufeinanderfolgende Polygone gleich sind (Überlapp). In diesem Beispiel ist das ein Dreieck und ein Viereck.

Definition 4: Muster

Um ein **Muster** zu erzeugen, legen wir Gruppen (Definition 2) von Polygonen (Definition 1) überlappend (Definition 3) immer so hin, dass die Polygone Kante-an-Kante liegen und keine Lücken übrigbleiben. Ein Muster entsteht, wenn immer wieder die gleichen Gruppen von Polygonen aneinanderpassen und sich das Muster dadurch regelmäßig immer weiter fortsetzen lässt. Einfache Muster bestehen nur aus einer Art von Polygonen (also nur aus einer einfachen Gruppe), gemischte Muster bestehen aus *einer* gemischten Gruppe. Doppelt gemischte Muster kombinieren *zwei* verschiedenen Gruppen, bei dreifach gemischten Mustern sind es *drei* verschiedene Gruppen und so weiter.

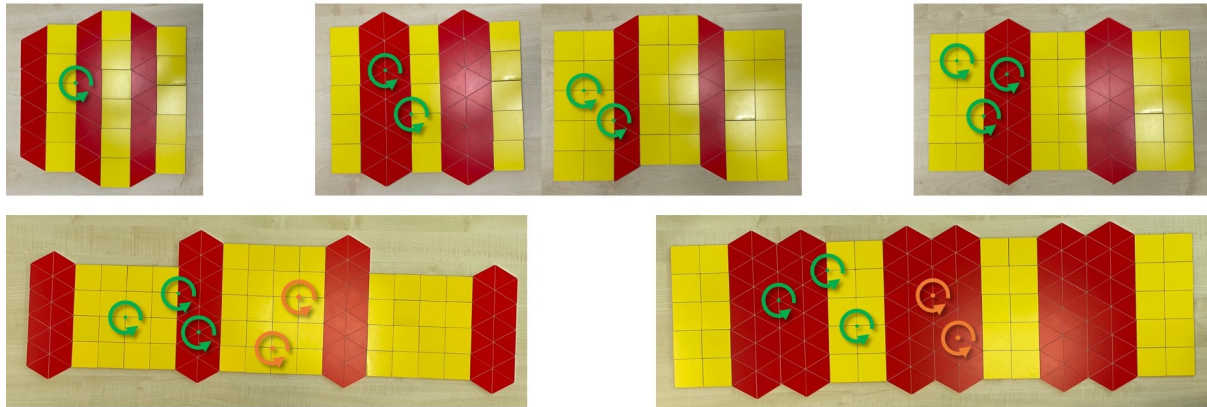
Hier sind Beispiele für einfache, gemischte, doppelt gemischte und dreifach gemischte Muster. Die Gruppen sind durch Kreise markiert:



Im Internet habe ich noch andere Definitionen für Muster und die Einteilung von einfach bis kompliziert gefunden. Für diese Definitionen probiert man aus, wie man ein Muster verschieben oder drehen kann, so dass jede Kante genau wieder auf einer Kante liegt. Das kann man z.B. machen, in dem man das gleiche Muster einmal auf ein Papier und einmal auf eine durchsichtige Folie zeichnet und diese dann übereinanderlegt. Zwei Ecken, die so übereinandergelegt werden können, zählen dann als gleich und die Kompliziertheit eines Musters hängt davon ab, wie viele verschiedene (also nicht gleiche) Ecken ein Muster hat.

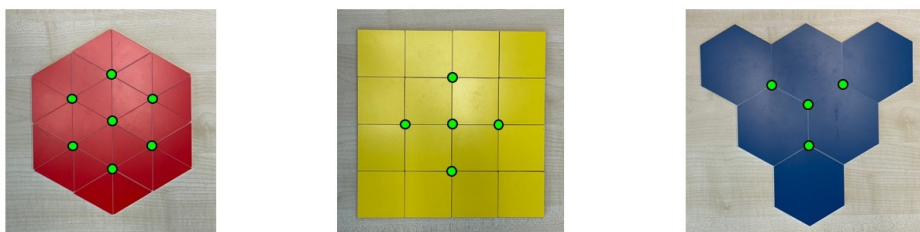
Das ist eigentlich so ähnlich wie meine eigene Definition mit den einfach, doppelt und dreifach gemischten Mustern. Aber nicht *genau* dasselbe, denn nicht alle Ecken mit der gleichen Gruppe (gleiche Ecken nach meiner Definition) können in einem komplizierten Muster auch übereinandergelegt werden (gleiche Ecken nach der Übereinanderlege-Definition).

Ich habe z.B. Muster aus Dreiecken und Vierecken gelegt:



Das erste Muster ist nach meiner Definition einfach gemischt (nur eine Art von Gruppen). Die zweiten beiden Muster sind doppelt gemischt und das dritte ist dreifach gemischt. Die nächsten beiden Muster in der zweiten Zeile sind nach meiner Definition immer noch dreifach gemischt (grüne Kreise), aber nach der Übereinanderlegen-Definition sind manche Ecken mit gleicher Gruppe trotzdem nicht gleich (orange Kreise), wenn sie an verschiedenen Stellen innerhalb der gelben oder roten Streifen liegen.

Diese Muster mit immer breiteren gelben oder roten Streifen finde ich aber eigentlich nicht so spannend und sie werden auch nicht wirklich komplizierter, weil innerhalb der Streifen nur immer noch größere Bereiche mit einfachen Mustern dazu kommen. Deswegen möchte ich keine solche Muster mit unnötig großen regulären Bereichen haben und sage, dass kein Muster einen der folgenden Teilbereiche enthalten darf:



Denn solche Teilbereiche, in denen eine einfache Gruppe nur von Gruppen mit der gleichen Gruppen-Art umgeben ist, sind ein Anzeichen für langweilige Bereiche. Damit sind auch die Muster oben in der zweiten Reihe mit den immer breiteren Streifen auch ausgeschlossen.

(4) Durchführung des Projektes / Vorgehensweise:

Ich möchte diese Fragen untersuchen und beantworten:

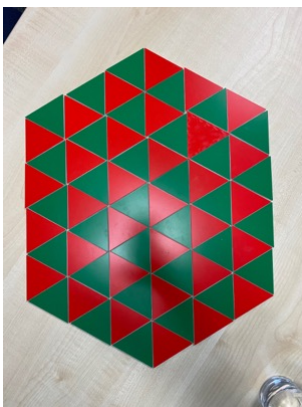
- (a) Welche einfachen Muster gibt es (und wie können wir sicher sein, dass wir kein Muster vergessen haben)?
- (b) Wie kann man gemischte Muster systematisch finden?
- (c) Wie kann man alle gemischten Muster aufzählen (und sicher sein, dass man keins vergessen hat)?
- (d) Wie kann man doppelt gemischte Muster finden (und sicher sein, dass man keins vergessen hat)?
- (e) Gibt es noch kompliziertere Muster?

(4.1) Einfache Muster

Einfache Muster bestehen aus einer einzigen Art von Polygonen. Wir wissen, dass man mit Dreiecken, Vierecken und Sechsecken einfache Muster legen kann. Einecke und Zweiecke gibt es nicht. Fünfecke kann man zu keiner Gruppe zusammenlegen, denn $3 \times 108 \text{ Grad} = 324 \text{ Grad}$, also noch weniger als 360 Grad und $4 \times 108 \text{ Grad} = 432 \text{ Grad}$ ist schon mehr als 360 Grad .

Beim Sechseck-Muster liegen immer 3 Polygone in einer Gruppe um eine Ecke herum, denn $3 \times 120 \text{ Grad} = 360 \text{ Grad}$. Weil der Innenwinkel von Siebenecken, Achtecken und so weiter größer ist als beim Sechseck, würden nur weniger als 3 Siebenecke, also höchstens 2, zu einer Gruppe zusammenpassen. Zwei Polygone können aber keine Gruppe bilden, denn sonst müsste ja jeder der beiden Innenwinkel 180 Grad sein, was nicht möglich ist.

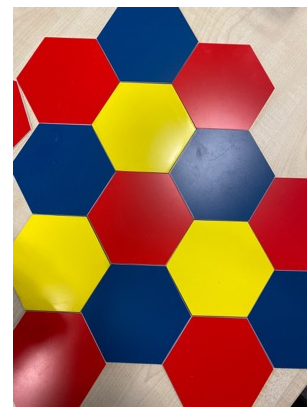
Also gibt es nur die drei einfachen Muster aus Dreiecken, Vierecken und Sechsecken:



3-3-3-3-3



4-4-4-4



6-6-6

(4.2) Gemischte Muster

Zunächst müssen wir herausfinden, wie viele Dreiecke, Vierecke und Sechsecke jeweils zu einer Gruppe um eine Ecke herum passen. Aus diesen Gruppen können wir dann gemischte Muster bilden.

Bei einer Gruppe muss die Summe der Innenwinkel 360 Grad ergeben, also zum Beispiel 6 Dreiecke ergibt $6 \times 60 \text{ Grad} = 360 \text{ Grad}$ oder 4 Vierecke ergibt $4 \times 90 \text{ Grad} = 360 \text{ Grad}$.

Wenn ich zum Beispiel ein Sechseck und zwei Vierecke nehme, dann ist die Summe der Innenwinkel: $120 \text{ Grad} + 2 \times 90 \text{ Grad} = 300 \text{ Grad}$. Das heißt es fehlen noch 60 Grad bis 360 Grad. Es passt also noch genau ein Dreieck dazu, um eine Gruppe zu bilden.

Ich finde alle möglichen Kombinationen mit einer Tabelle. Wenn alle Felder ausgefüllt sind, kann ich sicher sein, dass ich keine Kombination vergessen habe. Meine Tabelle hat 4 Zeilen für 0, 1, 2 oder 3 Sechsecke und 5 Spalten für 0, 1, 2, 3 oder 4 Vierecke. In die Tabelle trage ich ein, wie viele Dreiecke noch für eine vollständige Gruppe gebraucht werden:

Sechsecke \ Vierecke	0	1	2	3	4
0	6	X	3	X	0
1	4	X	1	X	X
2	2	X	X	X	X
3	0	X	X	X	X

Bei manchen Feldern kann gar keine Gruppe gebildet werden. Bei den Feldern mit einem roten Kreuz ist die Summe der Innenwinkel von Vierecken und Sechsecken ja schon größer als 360 Grad. Zum Beispiel: 2 Sechsecke und 2 Vierecke ergeben

$$2 \times 120 \text{ Grad} + 2 \times 90 \text{ Grad} = 420 \text{ Grad}$$

also mehr als 360 Grad. Diese Kombinationen passen also nicht. Bei den Feldern mit einem grünen Kreuz ist auch keine Gruppe möglich, weil zum Beispiel bei 3 Vierecken der Innenwinkel $3 \times 90 \text{ Grad} = 270 \text{ Grad}$ ist, also noch 90 Grad fehlen. Die 90 Grad kann man aber nicht mit Dreiecken oder Sechsecken zusammensetzen. Bei nur einem Viereck fehlen noch 270 Grad, aber auch die kann man nicht aus Dreiecken mit 60 Grad oder Sechsecken mit 120 Grad zusammensetzen (man braucht $270 : 60 = 4,5$ Dreiecke).

Es bleiben also noch **7 Felder** übrig. Die Felder mit **0** Vierecken und **0** Sechsecken, mit **4** Vierecken und **0** Sechsecken oder mit **0** Vierecken und **3** Sechsecken sind leicht, denn das sind die einfachen Gruppen, die nur aus einer Sorte von Polygonen bestehen.

Dann bleiben noch **4 Felder** übrig, für die ich die Anzahl der Dreiecke ausrechnen muss.

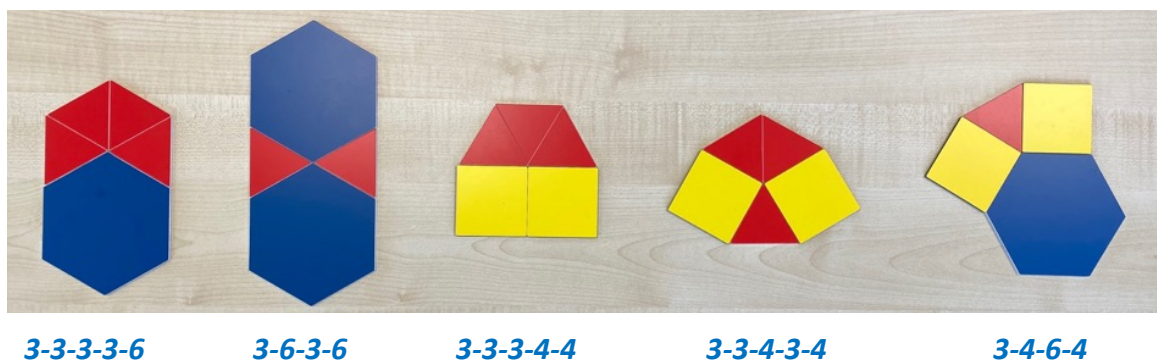
Jetzt habe ich die Anzahl der Dreiecke, Vierecke und Sechsecke gefunden, mit denen ich eine Gruppe bilden kann. Als nächstes probieren wir die verschiedenen Reihenfolgen aus, in der die Polygone für eine Gruppe um eine Ecke herum gelegt werden können. Für jede dieser Reihenfolgen schreibe ich den Code auf:

0	1	2	3	4
33333	X	44333	X	4444
63333	X	3444	X	X
		3446		
6363	X	X	X	X
6633				
3	666	X	X	X

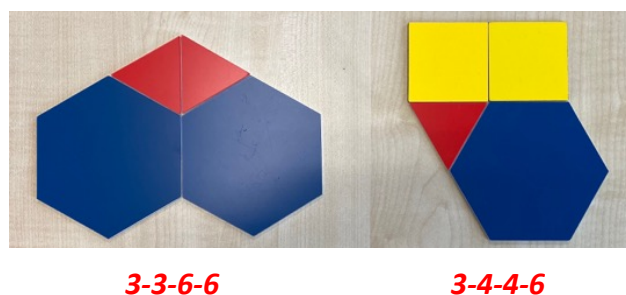
Damit habe ich alle Möglichkeiten gefunden, mit denen man Dreiecke, Vierecke, und Sechsecke um eine Ecke herum als Gruppe platzieren kann. Es gibt **10** verschiedene Codes.

Aus manchen Kombinationen lassen sich Muster über den ganzen Tisch fortsetzen, bei anderen passen die Gruppen nicht zusammen. In der Tabelle sind die schwarzen Codes die einfachen Gruppen, die blauen Codes sind die gemischten Gruppen und die roten Codes sind die gemischten Gruppen, aus denen man kein Muster fortsetzen kann.

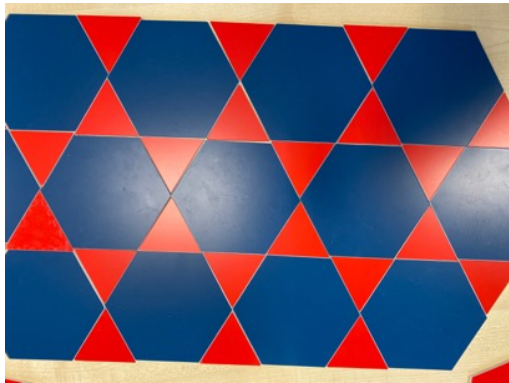
Ich habe also herausgefunden, dass es zusätzlich zu den **3** einfachen Mustern (in schwarz: **3-3-3-3-3-3**, **4-4-4-4**, **6-6-6**) noch genau **5** gemischte Muster aus Dreiecken, Vierecken und Sechsecken gibt, mit den Gruppen **3-3-3-3-6**, **3-6-3-6**, **3-3-3-4-4**, **3-3-4-3-4**, **3-4-6-4** :



Die Gruppen: **3-3-6-6** und **3-4-4-6** können nicht zu einem Muster fortgesetzt werden.



Hier sind die Bilder von allen **5** gemischten Mustern:



3-6-3-6



3-4-6-4



3-3-4-3-4



3-3-3-4-4



3-3-3-3-6

(4.3) Doppelt gemischte Muster

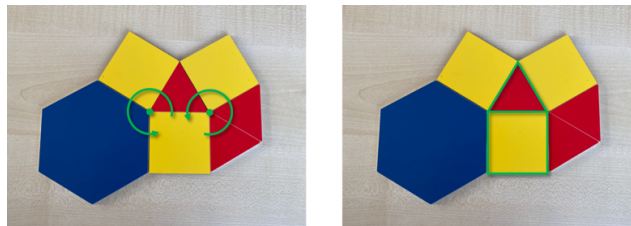
Bei den doppelt gemischten Mustern verwende ich zwei verschiedene Gruppen, das heißt ich kombiniere zwei verschiedene einfache oder gemischte Gruppen miteinander. Ich kann wieder alle möglichen Kombinationen systematisch mit einer Tabelle ausprobieren, damit ich keine Kombination aus Versehen vergesse.

Wir haben **3** einfache Gruppen, **5** gemischte Gruppen und noch **2** gemischte Gruppen, die alleine nicht zu einem Muster fortgesetzt werden können. Insgesamt haben wir also **10** mögliche verschiedene Gruppen, die ich miteinander kombinieren kann.

Deswegen brauche ich eine Tabelle mit **10** Zeilen und **10** Spalten und muss **10 x 10 = 100** Kombinationen ausprobieren. Zum Glück kann ich aber viele Kombinationen ausschließen.

- (a) Alle Kombinationen auf der Diagonale der Tabelle (auf der nächsten Seite) sind eigentlich gar nicht doppelt, sondern nur einfach gemischt, weil in der Zeile und der Spalte die gleiche Gruppe steht. Diese Muster habe ich bereits gefunden. Der Buchstabe „E“ steht für einfache Muster, der Buchstabe „G“ für gemischte.

- (b) Alle Kombinationen unterhalb der Diagonale muss ich nicht ausprobieren, weil über der Diagonale die gleiche Kombination nochmal vorkommt. Damit kann ich gleich die Hälfte aller Felder ausschließen. In diesen Feldern steht ein roter Kreis.
- (c) Wenn zwei gemischte Gruppen zusammenpassen sollen, dann müssen zwei aufeinanderfolgende Polygone (zwei aufeinanderfolgende Zahlen im Code) gleich sein (Definition 3). Wenn es solche zwei gleichen Polygone nicht gibt (zum Beispiel bei der Kombination von **3-4-6-4** und **6-6-6**), dann können die Gruppen auf keinen Fall zusammenpassen. Damit lassen sich nochmal viele Tabelleneinträge ausschließen. Das sind die Felder mit grünen Kreuzen.



In diesem Beispiel passen die beiden Gruppen **3-4-6-4** und **3-3-4-3-4** zusammen, weil die aufeinanderfolgenden Polygone **3-4** in beiden Codes vorkommen.

- (d) Es bleiben **23** Kombinationen, die ich wirklich ausprobieren muss. Zum Glück viel weniger als alle 100 Kombinationen!

		333333	4444	666	33344	33434	63333	6363	6633	3464	3446
1	333333	F	X	X	1,2	9,10	X	X	18	X	X
2	4444	0	E	X	3,4	X	X	X	X	X	X
3	666	0	0	E	X	X	X	X	X	X	X
4	33344	0	0	0	G	5,6 7,8	X	X	X	26	X
5	33434	0	0	0	0	G	X	X	X	27,28 29,30	X
6	63333	0	0	0	0	0	G	19 20	15	X	X
7	6363	0	0	0	0	0	0	G	16 17	X	22,23 24
8	6633	0	0	0	0	0	0	0	X	X	X
9	3464	0	0	0	0	0	0	0	0	G	21, 25
10	3446	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X

Bei **10** von diesen Kombinationen konnte ich die beiden gemischten Gruppen nicht zu einem Muster fortsetzen. Das sind die Felder mit einem blauen Kreuz in der Tabelle. Bleiben **13** Felder. Bei **3** Kombinationen konnte ich ein Muster konstruieren und bei **6** Kombinationen habe ich zwei verschiedene Muster aus den beiden Gruppen zusammensetzen können. In einem Fall waren es drei Möglichkeiten und in drei Feldern habe ich sogar vier Muster gefunden. Insgesamt habe ich also **30** doppelt gemischte Muster gefunden.

Auf der nächsten Seite zeige ich Bilder von allen **30** doppelt gemischten Mustern. Man kann hier verschiedene Arten von Mustern unterscheiden. Erst kommen **10** Muster, die nur aus Dreiecken und Vierecken bestehen, d.h. es werden nur die Gruppen **3-3-3-4-4** und **3-3-4-3-4** (und vielleicht noch **3-3-3-3-3-3** und **4-4-4-4**) miteinander gemischt. Dann kommen **10** Muster, die nur aus Dreiecken und Sechsecken bestehen, d.h. aus den Gruppen **6-3-3-3-3**, **6-3-6-3**, und **6-6-3-3** (und vielleicht noch **3-3-3-3-3-3** und **6-6-6**). Als letztes kommen **10** Muster, die Drei-, Vier- und Sechsecke benutzen, d.h. die Gruppen **3-4-3-6** oder **3-4-4-6** werden mit einer anderen Gruppe gemischt. Muster, die nur Vierecke und Sechsecke benutzen gibt es nicht, weil es ja auch keine Gruppe mit nur Vier- und Sechsecken gibt.

Auf der Wikipedia-Seite zu „Parkettierungen“ (<https://de.wikipedia.org/wiki/Parkettierung>), steht, dass es insgesamt **20** doppelt gemischte Muster gibt (dort heißen diese Muster demi-regulär). Von diesen **20** Mustern enthalten aber **3** Muster Zwölfecke, das heißt es bleiben **17** demi-reguläre Muster aus Dreiecken, Vierecken, und Sechsecken. Ich habe also **13** Muster gefunden, die auf der Wikipedia-Seite gar nicht stehen! Vielleicht liegt das daran, dass bei Wikipedia die Übereinanderlege-Definition benutzt worden ist. Denn bei dieser Definition werden ja manche Muster in verschiedene Muster-Arten eingeordnet, die bei meiner Definition zur gleichen Art gehören. Dazu steht im Wikipedia-Artikel aber leider nichts. Auf der nächsten Seite sind die **13** Muster, die ich mit meiner Definition neu entdeckt habe, mit einem roten Rahmen. Die Muster Nr. **6** & **7** und vor allem Nr. **21** gefallen mir am besten!

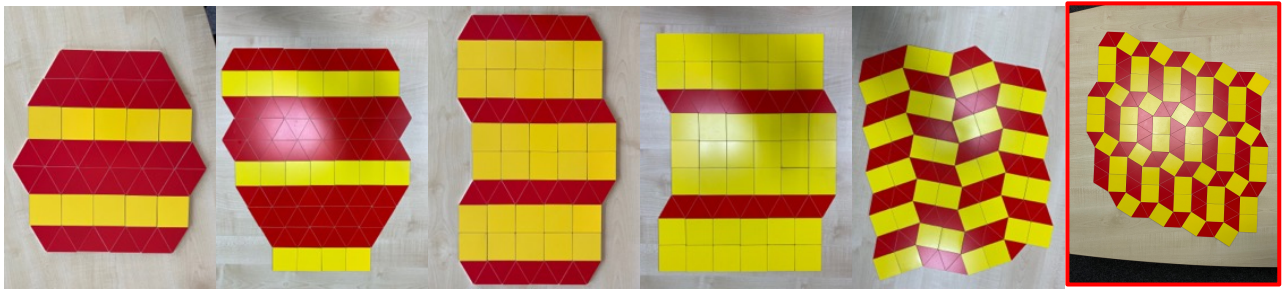
Wenn man genau hinguckt, dann sieht man, dass die Muster Nr. **1** bis Nr. **4** sich nur unterscheiden, dadurch dass immer eine zusätzliche Reihe von Dreiecken oder Vierecken eingefügt wurde. Genauso ist es bei den Mustern Nr. **12**, Nr. **13** und Nr. **14**, nur dass hier immer ein zusätzlicher Ring von Dreiecken um die Sechsecke eingefügt wird. Wenn man das so weiter macht, könnte man immer neue Muster erzeugen, aber die sind dann ziemlich langweilig, weil sie alle ähnlich aussehen. Deswegen habe ich in der Definition 4 ja festgelegt, dass meine Muster keine großen einfachen Teilbereiche enthalten sollen.

(4.4) Dreifach gemischte Muster

Jetzt will ich drei verschiedene Gruppen für ein Muster mischen. Hierfür gibt es ziemlich viele Möglichkeiten, nämlich **10 x 10 x 10 = 1000** Stück. Das würde viel zu lange dauern.

Ich kann aber wieder eine ganze Menge von diesen Möglichkeiten von vorne herein ausschließen, wie ich es bei den doppelt gemischten Mustern auch schon gemacht habe.

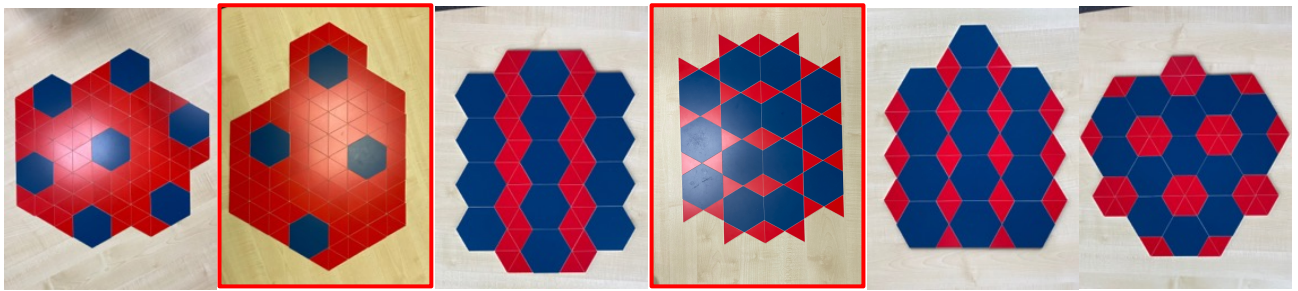
Ich suche die dreifach gemischten Muster, bei denen alle drei Gruppen verschieden sind, denn wenn zwei oder sogar alle drei Gruppen gleich sind, dann bekomme ich ja wieder nur doppelt oder einfach gemischte Muster. Aber wie viele Kombinationen von verschiedenen Gruppen gibt es überhaupt?



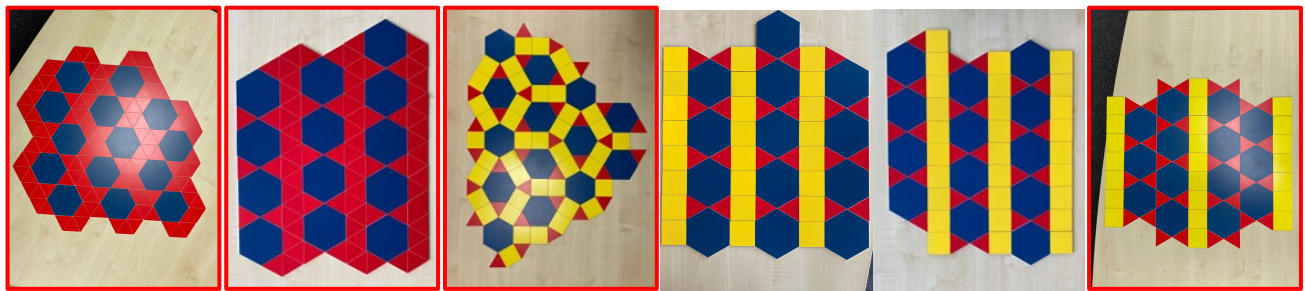
1 2 3 4 5 6



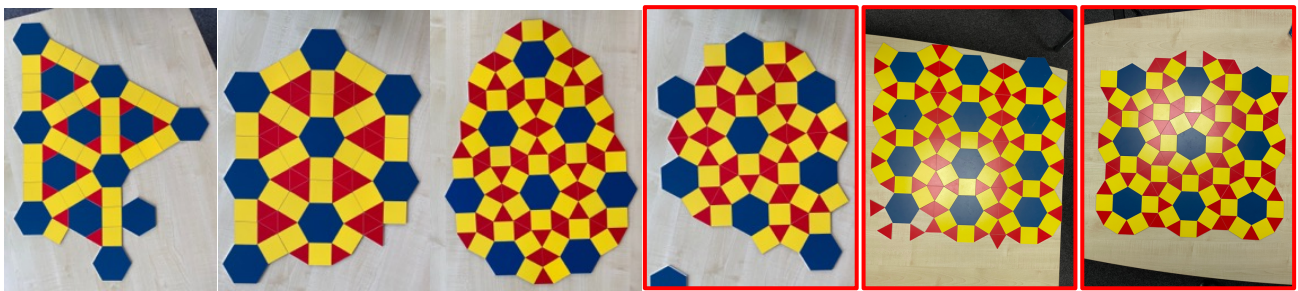
7 8 9 10 11 12



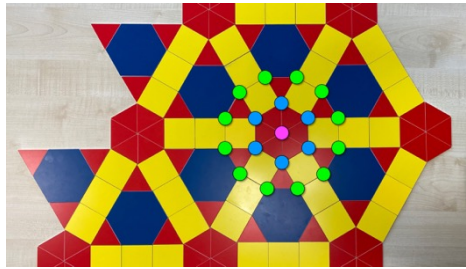
13 14 15 16 17 18



19 20 21 22 23 24



25 26 27 28 29 30



*Das Bild zeigt ein dreifach gemischtes Muster aus den Gruppen **1** (3-3-3-3-3-3), **5** (4-3-4-3-3) und **10** (3-4-4-6). Obwohl die Gruppen **1** und **10** als doppelt gemischtes Muster nicht zusammenpassen, funktioniert das dreifach gemischte Muster. Das liegt daran, dass zwischen den Gruppen **1** (pink) und den Gruppen **10** (grün) immer eine Gruppe **5** (hellblau) liegt und daher die nicht-passenden Gruppen **1** und **10** niemals direkt aneinanderversuchen müssen.*

Wenn aber eine der drei Gruppen mit beiden anderen Gruppen nicht zusammenpasst, dann kann ich diese Kombination wirklich ausschließen, denn damit ist dann kein dreifach gemischtes Muster mehr möglich. Ich kann aus der Tabelle auf Seite 12 also alle die Kombinationen streichen, bei denen eine der Gruppen mit beiden anderen Gruppen nicht zusammenpasst (rote Kreuze). Dann bleiben sogar nur noch **60** Kombinationen zum Ausprobieren übrig!

Bei **28** von diesen **60** Kombinationen habe ich dreifach gemischte Muster gefunden (grüne Kreise in der Tabelle). Manche sehen den zweifach gemischten Mustern ähnlich, aber andere sehen ganz anders aus. Bei **5** Kombinationen habe ich sogar mehrere Muster gefunden (mehrere grüne Kreise). Auf der nächsten Seite zeige ich Fotos von **35** (aus **37**) Mustern.

(5) Fazit

Ich habe herausgefunden, dass man außer den **3** einfachen Mustern noch **5** gemischte Muster erzeugen kann, wenn man Dreiecke, Vierecke und Sechsecke mischt. Von den doppelt gemischten Mustern habe ich **30** gefunden und darunter sind sogar **13** Muster, die auf der Wikipedia-Seite vergessen worden sind. Von den dreifach gemischten Mustern habe ich für **28** Kombinationen neue Muster gefunden. Insgesamt bin ich auf **37** verschiedene dreifach gemischte Muster gekommen. Ich habe alle diese Muster systematisch erzeugt, indem ich Tabellen benutzt habe und dann alle Felder einzeln untersucht habe. Dadurch kann ich immer überprüfen, ob ich eine Kombination vergessen habe. Viele Kombinationen konnte ich zum Glück schon ohne Ausprobieren von vorne herein ausschließen.

Mit der Einteilung in einfach, doppelt und dreifach gemischte Muster kann man die Muster nach ihrer Kompliziertheit ordnen. Man könnte die Muster aber auch anders einteilen, z.B. in Muster, die nur 3- und 4-Ecke benutzen, welche, die nur 3- und 6-Ecke benutzen und welche, die alle drei Polygone benutzen. Wenn man die Muster auf Seite 11 und 14 genau anguckt, erkennt man sogar noch andere Ähnlichkeiten. Es gibt nämlich eigentlich nur drei verschiedene Arten, wie sich die Muster wiederholen. Das sind: **Streifen-Muster, Gitter-Muster und Waben-Muster** (Bild auf Seite 15).

Die Idee, die komplizierte Suche nach neuen Mustern in viele einfache Probleme aufzuteilen, indem ich jede Kombination (jeden Tabelleneintrag) einzeln untersucht habe, hat sehr gut funktioniert. So habe ich viele Muster entdeckt, auf die ich sonst nie gekommen wäre. Leider wird aber sogar die Suche nach Mustern für eine feste Kombination von Gruppen immer

schwieriger, je mehr verschiedene Gruppen man mischt. Bei den dreifach gemischten Mustern hat es manchmal schon eine ganze Weile gedauert, bis ich ein Muster gefunden hatte. Deswegen kann ich mir leider nicht 100% sicher sein, dass ich nicht doch ein Muster übersehen habe. Um sicher zu gehen, sollte ich vielleicht die Kombinationen mit den blauen Kreuzen in der Tabelle auf Seite 12 nochmal genauer untersuchen.



verschiedene Arten von Mustern



Bei allen Mustern, die ich gefunden habe, wiederholen sich die Gruppen immer auf eine von drei verschiedenen Arten. Der Unterschied ist dann nur wie die Teilmuster aussehen, die sich wiederholen. In diesem Bild sind in der ersten Spalte Beispiel-Muster aus 3- und 4-Ecken, in der zweiten Spalte Muster aus 3- und 6-Ecken und in der dritten Spalte Muster aus 3-, 4- und 6-Ecken. Die Zeilen zeigen von oben nach unten: **Streifen-Muster, Gitter-Muster und Waben-Muster.**

Außerdem habe ich gesehen, dass es bei den doppelt und dreifach gemischten Mustern für einige der Gruppen-Kombinationen mehrere Muster gibt. Manchmal entstehen die dadurch, dass einfach zusätzliche Reihen oder Ringe von Polygonen eingefügt werden. Diese Muster sind dann alle ziemlich ähnlich. In meinem Projekt wollte ich aber möglichst viele ganz unterschiedliche Muster finden. Daher habe ich meine Muster ja so definiert, dass sie keine großen regelmäßigen Bereiche enthalten dürfen (Definition 4).

(6) Quellen

Ich habe im Internet nach Bildern von Mustern gesucht und bei Wikipedia nachgesehen (<https://de.wikipedia.org/wiki/Parkettierung>), welche Muster dort aufgelistet sind.

Ein paar andere interessante Web-Seiten sind:

<http://www.mathematische-basteleien.de/parkett2.htm>

<https://www.grundschulkoenig.de/mathe/4-klasse/bandornamente-und-parkette/>

<https://www.meinunterricht.de/arbeitsblaetter/mathematik/parkette/dokument/parkettierungen-ordnen>

<https://www.mathoid.de/data/documents/Parkette.pdf>

<https://probabilitysports.com/tilings.html>

wo auch die Übereinanderlege-Definition von Mustern erklärt wird und eine vollständige Liste aller Muster steht. Mein Vater hat mir bei dem Projekt geholfen. Er hat mir erklärt, wie ich beim Suchen von neuen Mustern systematisch vorgehen kann und er hat mir auch etwas beim Schreiben des Berichtes am Computer geholfen.